SESSION 1998 **M001**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Le problème étudie la minimisation d'une fonctionnelle sur un espace de fonctions vérifiant $y(0)=0$ *et* $y(1)=c$. *La première partie consiste à démontrer un lemme qui sera utilisé dans la deuxième partie. Les troisième et quatrième parties traitent de cas particuliers.*

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, le déplacement d'un point mobile M est soumis à la contrainte suivante : lorsque le point occupe la position (x,y), sa vitesse algébrique a pour valeur imposée $v(x,y)$, où v est une fonction donnée des 2 variables réelles x et y. Le temps mis par M pour parcourir un arc Γ de classe C^1, d'origine O, d'extrémité A de coordonnées (ℓ,c) et d'équation $y=\varphi(x)$ a donc pour valeur :

$$T=\int_{\Gamma}\frac{d\sigma}{v(x,y)}=\int_0^{\ell}\frac{\sqrt{1+\varphi'^2(x)}}{v\big(x,\varphi(x)\big)}dx$$

PARTIE I

I désigne l'intervalle $[0,1]$ et $C^1(I)$ l'espace vectoriel sur R des applications de I dans R de classe C^1 sur I, muni de la norme de la convergence uniforme sur I.

1. Montrer que l'ensemble $\Gamma^1(I)$ des fonctions $u\in C^1(I)$ telles que $u(0)=u(1)=0$ est un sous espace vectoriel de $C^1(I)$ fermé (c'est à dire tel que la limite f, de toute suite f_n, d'éléments de $\Gamma^1(I)$, convergente dans $C^1(I)$, appartient à $\Gamma^1(I)$).

2. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$ et h la fonction définie sur I par :

$\forall x \in [0, a[\quad h(x) = 0$
$\forall x \in [a, b] \quad h(x) = (x-a)^2 (b-x)^2$
$\forall x \in]b, 1] \quad h(x) = 0$

Vérifier que $h \in \Gamma^1(I)$ et calculer $\int_0^1 h(x)dx$.

3. Dans ce qui suit, g désigne une fonction réelle définie et continue sur I. Montrer que l'application G de $\Gamma^1(I)$ dans R définie par :

$$G: u \to G(u) = \int_0^1 g(x)\, u(x)\, dx$$

est linéaire et continue sur $\Gamma^1(I)$.

4. Montrer que, s'il existe $x_0 \in I$ tel que la fonction g vérifie l'inégalité $g(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$ inclus dans I et un nombre $\alpha > 0$ tels que l'on ait :

$\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq \alpha$

En déduire alors que, pour que l'on ait $G(u) = 0 \quad \forall u \in \Gamma^1(I)$, il faut et il suffit que g soit la fonction nulle.

5. G_1 est la forme linéaire sur $\Gamma^1(I)$ définie par :

$$\forall u \in \Gamma^1(I) \qquad G_1(u) = \int_0^1 g(x)u'(x)dx$$

Soit $g \in C^1(I)$, montrer que $G_1(u) = 0 \quad \forall u \in \Gamma^1(I)$ si et seulement si g est constante sur I.

6. On suppose dans cette question que g est uniquement continue sur I.

Quelle valeur faut-il donner à la constante réelle μ pour qu'il existe une fonction $u_\mu \in \Gamma^1(I)$, dont la dérivée u'_μ est la fonction $x \to g(x) - \mu$?

Vérifier que, pour cette valeur de μ, on a :

$$G_1(u_\mu) = \int_0^1 \left(u'_\mu(x)\right)^2 dx$$

En déduire que $G_1(u) = 0 \quad \forall u \in \Gamma^1(I)$ si et seulement si la fonction g est constante sur I.

PARTIE II

1. c étant un réel positif ou nul donné, $\Gamma^1_c(I)$ désigne le sous-ensemble de $C^1(I)$ dont les éléments sont les fonctions y telles que $y(0) = 0$ et $y(1) = c$. Que peut-on dire de la différence $y_2 - y_1$ de deux éléments y_1 et y_2 de $\Gamma^1_c(I)$?

2. $f:(x,t)\to f(x,t)$ désignant une fonction réelle donnée, définie sur $\Delta = I\times\mathbb{R}$, continue, ayant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ continue sur Δ, on considère l'application :

$$F:Y\to F(Y)=\int_0^1 f\left(x,Y'(x)\right)dx \qquad \text{de } \Gamma_c^1(I) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Prouver que si y correspond à un minimum local de F, alors, pour toute fonction $u\in\Gamma^1(I)$ non nulle, l'application :

$$G_u:\theta\to G_u(\theta)=\int_0^1 f\left(x,y'(x)+\theta u'(x)\right)dx$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ présente un minimum local pour $\theta=0$.

3. Soient u et y deux éléments respectivement de $\Gamma^1(I)$ et $\Gamma_c^1(I)$; vérifier que G_u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner l'expression de $G_u'(\theta)$ sous forme d'intégrale et déterminer $G_u'(0)$.

4. Déduire alors de ce qui précède qu'une condition nécessaire pour que la fonction $y\in\Gamma_c^1(I)$ corresponde à un minimum local de F est l'existence d'un réel λ tel que y soit solution sur I de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y')=\lambda \qquad \text{c'est à dire} \qquad \exists\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall x\in I \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,y'(x))=\lambda .$$

PARTIE III

1. $\alpha:x\to\alpha(x)$ étant une fonction définie sur I, continue et croissante, telle que $\alpha(0)>0$, déterminer l'ensemble L des réels $\lambda\geq 0$ pour lesquels l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \qquad \alpha(x)\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\lambda$$

admet des solutions appartenant à $C^1(I)$. Pour tout $\lambda\in L$, exprimer sous forme d'intégrale la solution particulière $y_\lambda\in C^1(I)$ de (E_λ) telle que $y_\lambda(0)=0$.

2. Soit la fonction k définie sur L par :

$$k(\lambda)=\int_0^1 \frac{\lambda}{\sqrt{(\alpha(x))^2-\lambda^2}}\,dx .$$

a) Montrer que k est continue, dérivable et injective sur L.

b) On suppose désormais qu'il existe un réel strictement positif β tel que $\alpha(x)-\alpha(0)\geq\beta x$ pour tout x de I. Montrer que k est bornée et en déduire que k possède une limite finie K lorsque λ tend vers $\alpha(0)$.

3. A quelle condition doit satisfaire le nombre $c \geq 0$ pour qu'il existe une valeur de λ pour laquelle (E_λ) admette une solution y appartenant à $\Gamma_c^1(I)$?

Cette condition étant supposée remplie, montrer que la valeur de λ est unique ; on la désignera par $\lambda(c)$. Vérifier alors que la seule solution de $(E_{\lambda(c)})$ qui appartienne à $\Gamma_c^1(I)$ est $y_{\lambda(c)}$.

PARTIE IV

Les notations étant celles de la partie II, on s'intéresse désormais à l'étude des minima locaux stricts de l'application :

$$F : Y \to F(Y) = \int_0^1 f(x, Y'(x))\, dx$$

de $\Gamma_c^1(I)$ dans $\mathbb{R}$, dans le cas particulier où la fonction f est définie sur $\Delta = I \times \mathbb{R}$ par $f(x,t) = \alpha(x)\sqrt{1+t^2}$, α étant la fonction introduite au III.

1. Etudier, pour tout triplet (x,t,s) de $\Delta \times \mathbb{R}$ le signe de :

$$\phi(x,t,s) = f(x,t+s) - f(x,t) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,t).$$

2. Montrer que si la fonction $y \in \Gamma_c^1(I)$ correspond à un minimum local strict parmi les fonctions de $\Gamma_c^1(I)$ de l'application F, elle est nécessairement égale à la fonction $y_{\lambda(c)}$ définie dans la partie III.

3. Réciproquement, on se propose de montrer que cette fonction $y = y_{\lambda(c)}$ correspond non seulement à un minimum local strict de F, mais au minimum strict absolu. Déduire ce résultat de l'étude du signe de l'intégrale :

$$\int_0^1 \phi(x, y'(x), u'(x))\, dx \quad \text{où } \phi \text{ est la fonction définie à la question IV.1 et } u \in \Gamma^1(I).$$

4. Ce qui suit est une application au cas particulier où $\forall\, x \in I \quad \alpha(x) = 1 + x$.

Déterminer L défini au III.1. Vérifier que, $\forall\, \lambda \in L$, $\forall\, x \in I$:

$$y_\lambda(x) = \lambda\, \mathrm{Ln}\frac{1 + x + \sqrt{(1+x)^2 - \lambda^2}}{1 + \sqrt{1-\lambda^2}}$$

5. Dans le cas où $\ell = 1$, pour quelles fonctions $v(x,y)$ sait-on montrer, en utilisant la partie IV, qu'il existe un arc joignant le point origine O et le point particulier A de coordonnées $(1,c)$ pour lequel le temps de parcours est minimum ? Cet arc est-il unique ?

Fin de l'énoncé